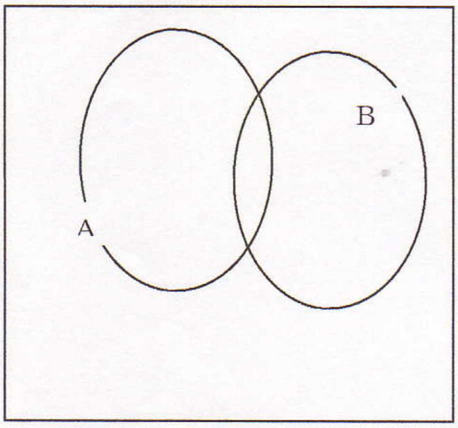
情報数学の基礎　～確　率～

１．確率の公理

試行で起り得る結果を標本点（ω），あらゆる可能な標本点の集合を標本空間（Ω）という。
標本空間の任意の部分集合（Ａ）を事象という。事象Ａに含まれない標本点の事象をＡの余事象といい，A^cで表す。すなわち，$A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$。事象Ａ，Ｂに対して，和事象$A \cup B$，積事象$A \cap B$も同様に定義する。



定義：標本空間Ωの上の任意の事象Ａに対して，実数を割り当てる関数Ｐ（Ａ）が定義されていて，

(1) $0 \leqq P(A) \leqq 1$
(2) $P(\Omega) = 1$
(3) $A \cap B = \phi$（空集合）のとき，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

を満たす時，Ｐ（Ａ）をＡの確率という。

定理：

(1) $P(A^c) = 1 - P(A)$，特に，$P(\phi) = 0$
(2) $A \subseteq B$ならば，$P(A) \leqq P(B)$
(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

２．ブール代数

確率は，ブール代数の典型的なモデル(例)
（要素を確率と考え、∨を和集合、・を積集合、～を補集合と考える）

(1) ベキ等律： $a \vee a = a$、$a \cdot a = a$
(2) 交換律： $a \vee b = b \vee a$，$a \cdot b = b \cdot a$
(3) 結合律： $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$、$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(4) 吸収律： $a \vee (a \cdot b) = a$、$a \cdot (a \vee b) = a$
(5) 分配律： $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$、$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c)$
(6) 二重否定： $\sim(\sim a) = a$
(7) 相補律： $a \vee \sim a = 1$、$a \cdot \sim a = 0$
(8) 単位元： $a \vee 0 = a$、$a \cdot 1 = a$
(9) ゼロ元： $a \vee 1 = 1$、$a \cdot 0 = 0$
(10) ド・モルガン律： $\sim(a \vee b) = \sim a \cdot \sim b$、$\sim(a \cdot b) = \sim a \vee \sim b$

３．条件付確率と独立

$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$
$P(A \mid B) = P(A)$の時，ＡとＢとは，独立であると言う。
ＡとＢとが独立ならば，$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
成功する確率がｐ，失敗する確率が$q = 1 - p$の時，ｎ回の試行でｘ回成功する確率は，
各試行が独立の時，$C(n, x)\, p^x q^{(n-x)}$

４．ベイズの定理

事前確率と事後確率の関係：
$P(B \mid A) = P(A \mid B) \times P(B) / P(A)$

$A \subseteq B = B1 \cup B2 \cup \cdots \cup Bn$，
$Bi \cap Bj = \phi$ $(i \neq j)$ のとき，
$$P(Bi \mid A) = P(A \mid Bi) \times P(Bi) / \sum_{(i=1,\cdots,n)} P(A \mid Bi) \times P(Bi)$$

６．情報量

シャノンのエントロピー
情報源Ｓの記号 A1，・・・，An の生起確率を P(Ai) (I=1, …, n) とする時，Ai の自己情報量を$-\log_2 P(Ai)$と定義し，情報源Ｓの平均情報量を自己情報量の期待値
$$H(S) = -\sum_{(i=1,\cdots,n)} P(Ai) \times \log_2 P(Ai)$$
として定義して与えられる情報量をエントロピーと呼ぶ。

演習問題

1．　$P(A)=0.8$,　$P(B)=0.7$ として、A と B とは独立であるとする。

この時、$P(A^c \cap B)$ の値を求めよ。

2．　$P(A)=0.8$,　$P(B)=0.7$ として、$P(A \cap B)=0.5$ とする。この時、

$P(A^c \cap B^c)$ の値を求めよ。

3．サイコロの目で、A＝とても大きい目＝｛5，6｝、B＝奇数

として時、ベイズの定理を用いて、$P(B \mid A)$ を $P(A \mid B)$、

$P(A)$、$P(B)$ から計算せよ

4．$S = \{A_1(1/2), A_2(1/4), A_3(1/8), A_4(1/8)\}$

(括弧は確率)とする時、S の情報エントロピーを求めよ

宿題

5．　確率の公理から

$P(A^C)=1-P(A)$，特に，$P(\phi)=0$　を証明せよ

6．確率の公理から

$A \subseteq B$ ならば $P(A) \leqq P(B)$ を証明せよ。

7．情報源 S を

$S = \{A_1(1/3), A_2(1/3), A_3(1/12), A_4(1/12), A_5(1/12), A_6(1/12)\}$

（括弧は確率）とする時、S の情報エントロピーを求めよ

($\log_2(1/3)$, $\log^2(1/12)$ の値は、数表又は電卓で求めよ)。