

論理式の簡単化

1. 論理式の変形による簡単化

—ブール代数の公理を用いる—

例: $f = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\sim x_3 \vee x_1\sim x_2x_3 \vee \sim x_1x_2x_3 \vee \sim x_1x_2\sim x_3$

という論理式を簡単化する。

$$\begin{aligned} f &= (x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\sim x_3) \vee (x_1x_2x_3 \vee x_1\sim x_2x_3) \\ &\vee (\sim x_1x_2x_3 \vee \sim x_1x_2\sim x_3) \\ &= x_1x_2(x_3 \vee \sim x_3) \vee x_1x_3(x_2 \vee \sim x_2) \\ &\vee \sim x_1x_2(x_3 \vee \sim x_3) \\ &= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \sim x_1x_2 \\ &= (x_1 \vee \sim x_1)x_2 \vee x_1x_3 \\ &= x_2 \vee x_1x_3 \end{aligned}$$

(注) 論理積 (·) の記号は省略する

2. カルノー図を用いた簡単化

—たかだか 4 ~ 5 変数まで—

例 1: $f = x_2 \vee x_1x_3$

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3	0	0	1	0
	1	0	1	1

Handwritten annotations: x_2 (circles in row 2), x_1x_3 (circles in column 3)

例 2: $f = \sim x_2 \vee x_1 \sim x_3$

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3	0	1	0	1
	1	1	0	0

Handwritten annotations: $x_1 \sim x_3$ (circles in row 1), $\sim x_2$ (circles in row 2)

例 3: $f = (x_1 \vee x_3)(\sim x_2 \vee \sim x_3)$: 乗法形式

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3	0	0	1	1
	1	1	0	0

Handwritten annotations: $(x_1 \vee x_3)$ (circles in row 1), $(\sim x_2 \vee \sim x_3)$ (circles in row 2)

$f = x_1 \sim x_3 \vee \sim x_2 x_3$: 加法形式

例 4: $f = \sim x_1 \sim x_3 \vee \sim x_1 \vee \sim x_3 \sim x_4$

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3	0	0	1	1
x4	0	1	1	0
	1	1	0	0
	1	0	0	0
	1	0	1	1

Handwritten annotations: $\sim x_1 \sim x_3$ (circles in row 1), $\sim x_1$ (circles in row 2), $\sim x_3 \sim x_4$ (circles in row 3)

3. カルノー図表

2変数

x	0	1
y	0	1
	0	1
	1	1

x ∨ y の例

並び方に注意

3変数

x	0	0	1	1
y	0	1	1	0
z	0	0	0	0
	1	1	1	1

並び方に注意

4変数

x	0	0	1	1
y	0	1	1	0
z	0	0	0	0
w	0	1	1	1
	1	1	1	0
	1	0	0	0

並び方に注意

問題

問題 1: 次の f3, f8, f12 を論理式で表現せよ。

x1	x2	f3	f8	f12
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

論理式の簡単化：問題

問題

問題 1 : 簡単化せよ。

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3				
0	1	1	1	1
1	1	0	0	1

問題 2 : 簡単化せよ。

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3				
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

問題 3 : 例題 1 を乗法形式で簡単化せよ。

問題 4 : 前問で得られた乗法形式を
加法形式に展開し、その結果を考察せよ。

問題 5 : 簡単化せよ。

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3				
x4				
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0

問題 6 : 簡単化せよ。

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3				
x4				
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0

問題 7 : 簡単化せよ。

x1	0	0	1	1
x2	0	1	1	0
x3				
x4				
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	0	1	1	0

問題 8 : 例題 4 を乗法形式で簡単化せよ

問題 9 : 前問で得られた乗法形式を
加法形式に展開し、その結果を考察せよ。

問題 10 : 例題 6 を加法形式で簡単化せよ。

問題 11 : 例題 6 を乗法形式で簡単化せよ。

問題 12 : 前問で得られた乗法形式を加法形式に展開し、その結果に吸収律を適用せよ。
問題 13 : 前問の結果が、例 6 のすべての主項の論理和になっていることを確かめよ (これをネルソンの定理と言う)。

省略

問題 14 : $f = \sim x1 \sim x3 \vee x2 \sim x3 \vee x1 \sim x3 \vee \sim x1 \sim x2 \vee \sim x1 x2 x3$

を簡単化せよ

問題 15 : $f = \sim x1 \sim x2 \sim x3 \vee \sim x1 \sim x3 \sim x4 \vee x2 \sim x3 x4 \vee x1 x2 x4 \vee \sim x1 x3 x4 \vee \sim x1 \sim x2 x4$

を簡単化せよ。

問題 16 : $f = x2 \sim x3 \vee x1 \sim x2 \sim x3 \vee \sim x1 \sim x2 x3 \vee \sim x1 \sim x2 \sim x3 \sim x4 \vee \sim x1 \sim x2 \sim x3 x4 \vee x1 \sim x2 x3 x4 \vee x1 x2 \sim x3 \sim x4$

を簡単化せよ。

問題 17 : 問題 14 を論理式の変形で簡単化せよ。