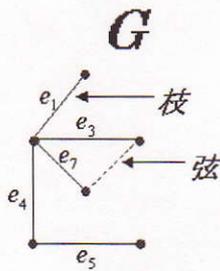
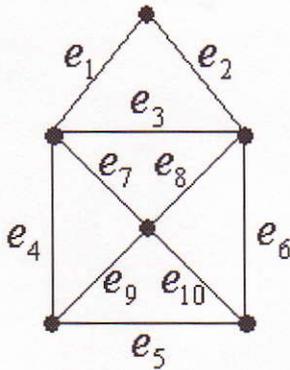


極大木と回路 (1)

1. 木と極大木

木 閉路を含まない連結グラフ
 極大木 全ての頂点を含む木
 弦 極大木に現れない辺



Gの極大木 T

M 個の頂点を持つ木の枝の数は、M-1 本である。

連結グラフ G の極大木 T の弦の数は、 $e \cdot M + 1$ 本である。(e : 辺の数)

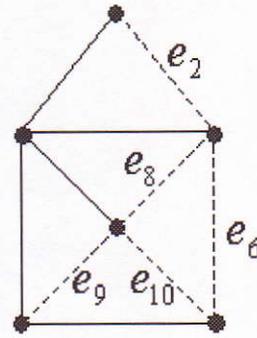
2. 重み最小(最大)の極大木

辺に重みが付いてる連結グラフにおいて、重みの合計が最小(最大)の極大木をいう。

3. 回路 (基本閉路のこと)

極大木 T にその弦 $e \cdot M + 1$ 本を付け加えると、 $e \cdot M + 1$ 個の別々の回路 (基本回路という)ができる。

回路の基本系 極大木 T のすべての基本回路の集合



極大木 T に対して、次の5つの基本回路ができる。

$$C_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$C_6 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$C_8 = \{e_3, e_7, e_8\}$$

$$C_9 = \{e_4, e_7, e_9\}$$

$$C_{10} = \{e_4, e_5, e_7, e_{10}\}$$

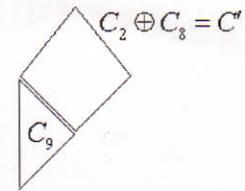
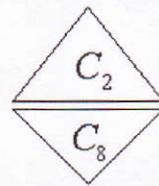
4. 回路の mode 2 の加算

mode2 の加算

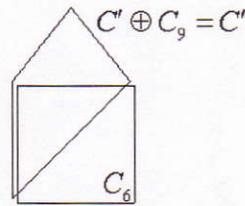
$$A \oplus B = \sim A \cdot B \vee A \cdot \sim B$$

mode2 の加算

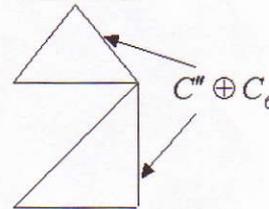
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$C_2 \oplus C_8 = C_9$$



$$C_9 \oplus C_6 = C_6$$



$$C_6 \oplus C_9 = C_6$$

“二つの回路の mode 2 の加算は、回路か、または、共通辺を持たない回路の和となる”

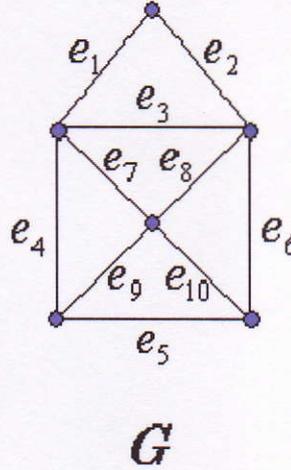
極大木と回路 (2)

5. 回路空間

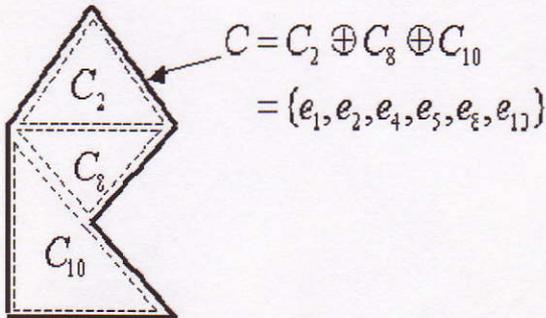
連結グラフ G の極大木を T とする。
 T の回路の基本系は、 G の回路空間をなす。
 即ち、 G の任意の回路は、いくつかの基本回路の mode2 の加算で表現できる。

例題： 右の連結グラフ G で、極大木 $T = \{e_1, e_3, e_4, e_5, e_7\}$ に対して、次の5つの基本回路ができる。

- $C_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$
- $C_6 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$
- $C_8 = \{e_3, e_7, e_8\}$
- $C_9 = \{e_4, e_7, e_9\}$
- $C_{10} = \{e_4, e_5, e_7, e_{10}\}$



この時、ある回路 $C = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_8, e_{10}\}$ 以下のように、基本回路の mode2 の加算で表現できる。



例題： 連結グラフ G で、辺のラベル e_i の i を辺の重みと考えた時の重み最大の極大木を求め、その極大木に対する基本回路の mode 2 の加算を用いて、回路 $C_x = \{e_1, e_7, e_9, e_5, e_6, e_2\}$ を表現せよ。

解) 重み最大の極大木 T は、
 $T = \{e_2, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ 。この時、
 $C_x = C_1 \oplus C_5 \oplus C_6$ 。ただし、基本回路 C_1, C_5, C_6 は以下の通り。
 $C_1 = \{e_1, e_7, e_8, e_2\}$, $C_5 = \{e_5, e_{10}, e_9\}$,
 $C_6 = \{e_6, e_8, e_{10}\}$

6. 回路の数

連結グラフに存在する回路の数の最大値は、 $2^{(e-v+1)}$ である。ただし、 e は辺の数、 v は頂点の数である。

7. 基本回路行列

5. の例題の基本回路は、以下のような基本回路行列で表現できる。
 この時、 C_x は、以下のように基本回路行列における行の mode2 の加算演算として得られる。

- ・基本回路行列の前半は、単位行列となる
- ・各基本回路には、弦が丁度 1 本あり、他の辺はすべて枝である。

	弦					枝				
	e2	e6	e8	e9	e10	e1	e3	e4	e5	e7
$M = C_2$	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
C_6	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
C_8	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
C_9	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
C_{10}	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1

$$C_x = C_2 \oplus C_8 \oplus C_{10} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)$$